אופרטורים:

# הגדרה

1. נקרא הפיך אם קיים אופרטור כך ש
2. נקרא לא סינגולרי אם ("מונופורפיזם", "אינג'קטיבי")

## הערות

1. אם חד-חד ערכי ועל אזי קיים ולינארי.
2. אם אזי T הוא 1-1.
3. ⬄ T חד חד ערכי T על.  
   דוגמה: , , אבל T איננו על: => לא קיים.  
   הערה: זה קורה בגלל ש.
4. אם => קיים כך ש

# משפט

יהי V מ"ו עם . התנאים הבאים הם שקולים:

1. לא סינגולרי()
2. חד חד ערכי
3. על()
4. הפיך(קיים כך ש)

## הוכחה

הוכחנו כבר ש1⬄2. נוכיח ש(4⬄)1⬄3.

מתקיים:

1=>3: אם => => , => כלומר T הוא על.

3=>1: T על ⬄ => => => .

# משפט

, , בסיס ו. T הפיך ⬄ A הפיכה (ואז )

## הוכחה

=>: T הפיך: קיים כך ש => .

<=: תהי A מטריצה הפיכה ו, נגדיר אופטרור ע"י: . מתקיים:  
לכן .

# משפט

לא סינגולרית()  
⬄  
קבוצה בת"ל אם ורק אם לכל קבוצה .

## הוכחה

=>: צ"ל שאם אזי לכל קבוצה : בת"ל ⬄ .  
יהיו סקלרים כך ש => => => כי בת"ל => בת"ל.

<=: צ"ל שאם בת"ל ⬄ בת"ל אזי |.  
אם אזי בת"ל אבל ת"ל.

# משפט

, איזומורפיזם(1-1 ועל) אם ורק אם:

1. T על
2. T 1-1

שדות סופיים

# משפט

יהי שדה סופי. קיימים p ראשוני ו שלם כך ש.

## הוכחה

אם p ראשוני אזי שדה.

## מאפיין של שדה

קיים לפי הגדרת השדה . ניתן לבנות את כל השדה ע"יבסופו של דבר המספרים חוזרים על עצמם כי זה שדה סופי – יהיו k,l כך ש

### למה

מספר ראשוני

#### הוכחה

אם l-k איננו ראשוני אזי . ניקח ו כי מחזור l-k הוא מינימלי.  
=> סתירה כי ב אין מחלקים של 0.

נתבונן בסדרה מp איברים   
אזי ו תת שדה. הוא מרחב ווקטורי מעל , ובגלל ש שדה סופי (כי זה קבוצה סופית => במרחב יש מספר סופי של ווקטורים => קיימת קבוצה פורשת סופית, לדוגמה => קיים גם בסיס סופי).

מרחב וקטורי מעל שדה איזומורפי למרחב "הסטנדרטי" , כלומר קיימת העתקה(לינארית) חד חד ערכית ועל => ,

# משפט

שדות הסופיים קיימים: לכל p ראשוני ו קיים שדה עם איברים.  
שני שדות סופיים עם אותו מספר איברים הם איזומורפיים.

# הגדרה

יהי שדה ו יחידה. נתבונן בסדרה . אם הסדרה הזאת היא אינסופית אזי  
 ואומרים שמאפיין של הוא 0, .  
אם הסדרה הזאת היא סופית אזי אומרים שמאפיין של הוא חיובי ו ו.

## הערה

הוכחנו שאם אזי . קיימים שדות אינסופיים אם